

# III Jornadas Matemáticas

## III Matematika Jardunaldiak

Iruñean, 2013-ko urriaren 25 eta 26a

Pamplona, 25-26 de octubre de 2013

# Estrategias de resolución de problemas de azar y probabilidad

Experiencia con alumnado de 3º y 4º  
de diversificación curricular

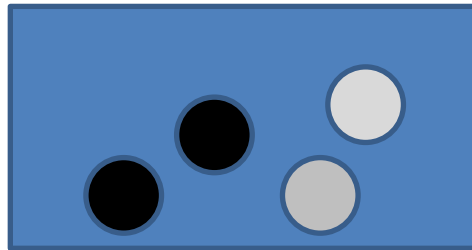
# El proceso

- Ante una situación o problema, ante la pregunta: ¿por qué apostarías...?
1. Apelar a la intuición, la lógica. Hacer conjeturas.
  2. Simular, experimentar el problema con materiales manipulativos, ordenadores...
  3. Demostrar, calcular, formalizar con estrategias de resolución de problemas.
  4. Análisis final

# Ejemplo 1:

Extraemos consecutivamente y al azar dos bolas de una caja que contiene dos bolas blancas y dos bolas negras.

¿Qué es más probable? ¿Que las dos bolas extraídas sean del mismo color o de diferente color? ¿Es quizás igual de probable un caso que otro? ¿Por qué apostarías?



# Intuición

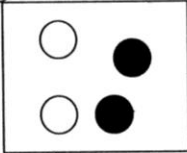
\* Aitzean dago.

2.- Kutxa honetatik **bi bola** aterako ditugu.  
Zure ustez, zer da posibleago? Biak kolore berekoak izatea edo kolore ezberdinetakoak izatea? Zergatik?

→ ZZ → Berdinak  
 → ZB → Ezberdinak  
 → BB → Berdinak

Orain kalkulatu:

Biak berdinak izateko aukera %50-ekoa da.  
 Biak ezberdinak izateko aukera %50.



Nire ustez aukera berdina dago.

Probabilitatea (bata zuria eta bestea beltza izateko, edozein ordenetan) =  $\frac{2}{4} \cdot 100 = 50\%$ eko aukera dago.

Probabilitatea (biak beltzak izateko) =  $\frac{2}{4} \cdot 100 = 50\%$ eko aukera dago biek berdinak ateratzeko.

Maitane: "Creo que las dos opciones tienen la misma probabilidad de ocurrir:

BB--iguales

BN--distintas

NB--distintas

NN--iguales

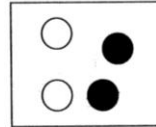
Hay cuatro opciones posibles y con dos de ellas salen del mismo color y con las otras dos de distinto color, luego hay un  $\frac{2}{4} \cdot 100 = 50\%$  de probabilidad en cada caso."



2.- Kutxa honetatik **bi bola** aterako ditugu.

Zure ustez, zer da posibleago? Biak kolore berekoak izatea edo kolore ezberdinetakoak izatea? Zergatik? **EzberdinaK.**

Denagun Xuria ateratzen duakla orduan  
barnean bi beltz daude eta xuri bakarra



Orain kalkulatu:  $\frac{1}{4} \cdot 100 = 25\%$

$\frac{1}{4} \cdot 100 = 25\%$

Probabilitatea (bata zuria eta bestea beltza izateko, edozein ordenetan) =  $50\%$

~~$25\%$   $1 - 25\% = 75\%$  barnean  $25\%$  zuria  $50\%$  beltza~~

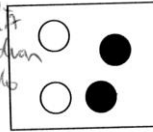
Probabilitatea (biak beltzak izateko) =  $50\%$

$50\%$

*Fernando: "Que sean distintas tiene mayor probabilidad: supongamos que la primera sale blanca; entonces dentro hay dos negras y una única bola blanca"*

2.- Kutxa honetatik bi bola aterako ditugu.  
Zure ustez, zer da posibleago? Biak kolore berekoak izatea edo kolore ezberdinetakoak izatea? Zergatik? Ezberdinetakoak

Lehenengo ateraldian %50 zuria eta %50 beltza  
Bigarrenaren lehenengoan zuria ate dela ba ordutan  
bigarrenaren izanena da %33'3 zuria ateratzeko  
eta %66'6 beltza ateratzeko



Orain kalkulatu:

Probabilitatea (bata zuria eta bestea beltza izateko, edozein ordenetan) =  $\frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3} = 66'6\%$   
Zuria leheni ateratzeko %50 eta beltza ateratzeko berdina. Bigarrena beltza ateratzeko  
lehenengoan zuria aterata %66'6 da eta zuria ateratzeko berdina.  
Probabilitatea (biak beltzak izateko) =  
Lehenengoan %50 da beltza ateratzeko eta bigarrenaren  
%33'3 beltza ateratzeko eta %66'6 zuria ateratzeko

*Julen: "De distinto color: En la primera extracción, la probabilidad de que sea blanca es del 50% y de que sea negra también del 50%. Supongamos que la primera es blanca, entonces la probabilidad de que la segunda sea blanca será del 33,3% y de que sea negra del 66,6%"*

2.- Kutxa honetatik **bi bola** aterako ditugu.

Zure ustez, zer da posibleago? Biak kolore berekoak izatea edo kolore ezberdinetakoak izatea? Zergatik?

Bat beltza eta

beste zuria.

Bat beltza eta

beste beltza.

Orain kalkulatu:

Probabilitatea

(bat zuria eta

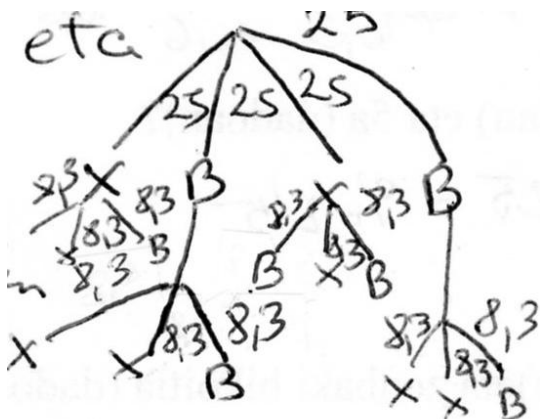
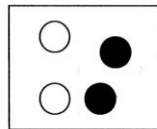
beste beltza izateko,

edozein ordenetan)

$P(B \text{ eta } X) = 8,3 \cdot 8,3 = \frac{9}{64}$

Probabilitatea (biak beltzak izateko)

$P(2 \text{ beltz}) = 8,3 + 8,3 = \frac{9}{16}$



Probabilitatea (bata zuria eta bestea beltza izateko, edozein ordenetan) =  $P(B \text{ eta } X) = 8,3 \cdot 8,3 = \frac{9}{64}$

Probabilitatea (biak beltzak izateko) =  $P(2 \text{ beltz}) = 8,3 + 8,3 = \frac{9}{16}$

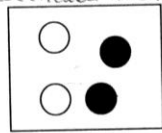
Endika: "Una negra y otra blanca. Cuando coges una quedan en la caja dos del otro color y una única del color que has cogido la primera"



2.- Kutxa honetatik **bi bola** aterako ditugu.

Zure ustez, zer da posibleago? Biak kolore berekoak izatea edo kolore ezberdinak izatea? Zergatik?

Niraz ustea probabilitate da. Biak kolore ezberdinak izatea zeren behar du  $\frac{2}{4}$  duna  
posible ateratea eta gero kolore berekoak izatea  $\frac{1}{3}$ .



Orain kalkulatu:

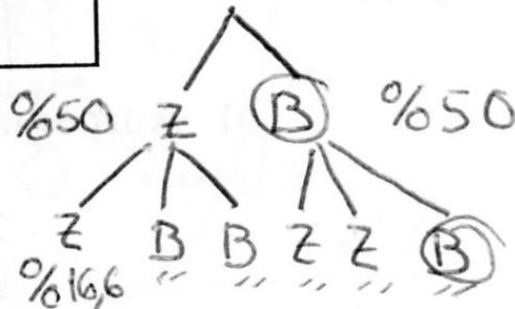
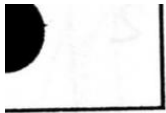
Probabilitatea (bata zuria eta bestea beltza izateko, edozein ordenetan)=

$$P(z, b) + P(b, z) = P(\%50, \%33,3) + P(\%50, \%33,3)$$

Probabilitatea (biak beltzak izateko)=

$$P(b, b) = \%16,6 \text{ da biak beltza ateratzeko}$$

Adei: "Creo que tiene mayor probabilidad que sean de distinto color; para que sean del mismo color, la probabilidad de la primera es 2/4 pero de la segunda es de 1/3"



Probabilitatea (bata zuria eta bestea beltza izateko, edozein ordenetan)=

$$P(z, b) + P(b, z) = P(\%50, \%33,3) + P(\%50, \%33,3)$$

$$\%33,3 + 33,3 = \%66,6 \text{ hor aukera dago.}$$

Probabilitatea (biak beltzak izateko)=

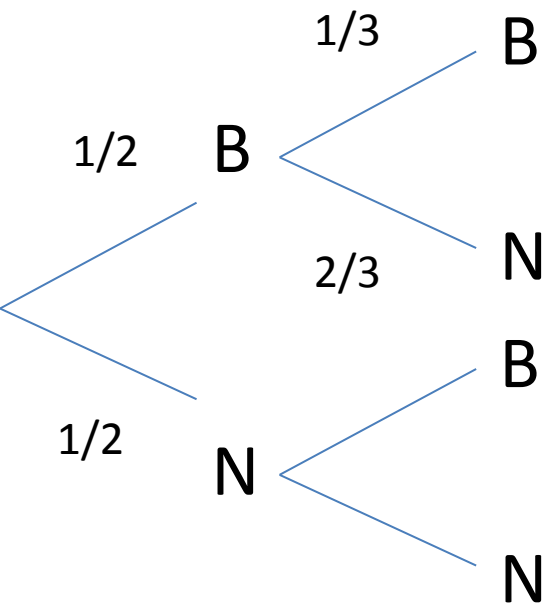
$$P(b, b) = \%16,6 \text{ da biak beltza ateratzeko}$$

# Experimentación

- Recogida de datos

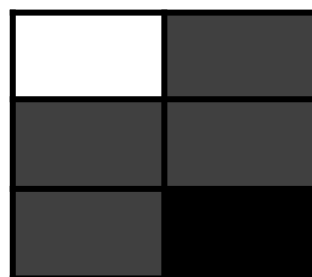
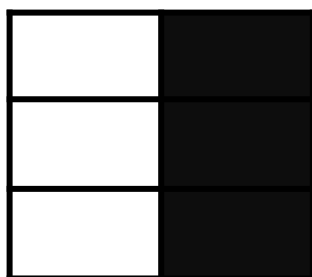
|                | Frecuencia absoluta | Frecuencia relativa (%) | Probabilidad |
|----------------|---------------------|-------------------------|--------------|
| Mismo color    |                     |                         |              |
| Distinto color |                     |                         |              |
| TOTAL          |                     |                         |              |

# Cálculo. Formalización



$$p(= color) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$p(\neq color) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$



$$p(\neq \text{color}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{6} + \frac{2}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

# Combinatoria

- B1B2/B2B1
- N1N2/N2N1
- B1N1/N1B1
- B1N2/N2B1
- B2N1/N1B2
- B2N2/N2B2

$$P(=\text{color}) = 4/12 = 33,3\%$$

$$P(\neq \text{color}) = 8/12 = 66,7\%$$

**Ejemplo 2:** Tiramos dos dados al azar. Si observamos la diferencia de los dos dados, qué número tiene más probabilidades de salir? ¿Por qué número apostarías? Relaciona en un gráfico las soluciones posibles y la probabilidad de cada una de ellas.

ateratzeko probabilitate gehien duen zenbakia? edo, zeinen alde egingen zenuke apustua?

- a) Adierazi taula batean kenketari begira dauden soluzio posible guztiak eta bakoitzak ateratzeko duen probabilitatea.  
b) Adierazi emaitzak grafikoki (x ardatzean soluzio posibleak - y ardatzean bakoitzaren probabilitatea)

| - | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2 | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 3 | 2 | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | 1 | 2 |
| 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | 1 |
| 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |

$$0 - \frac{6}{36} = \%16,7$$

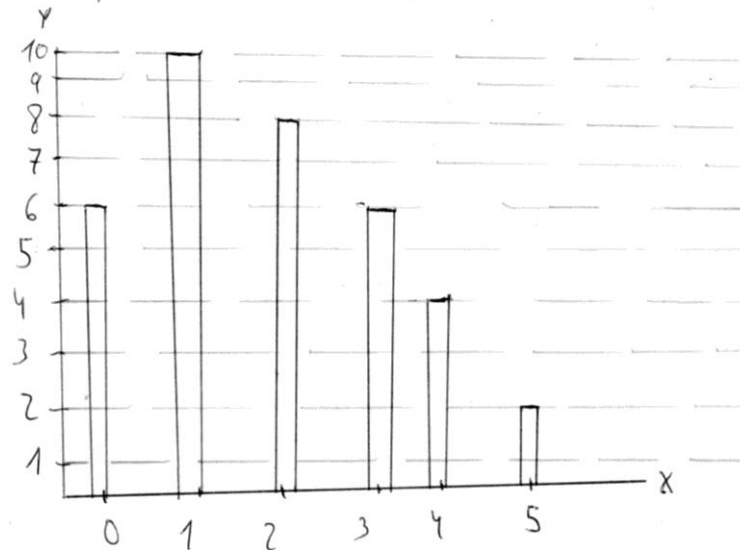
$$1 - \frac{10}{36} = \%27,8$$

$$2 - \frac{8}{36} = \%22,2$$

$$3 - \frac{6}{36} = \%16,7$$

$$4 - \frac{4}{36} = \%11,1$$

$$5 - \frac{2}{36} = \%5,6$$



5.- Bi dado jaurtiki ditugu; ateratako **bi zenbakien arteko kenketari begira**, zein da ateratzeko probabilitate gehien duen zenbakia? edo, zeinen alde egingen zenuke apustua?

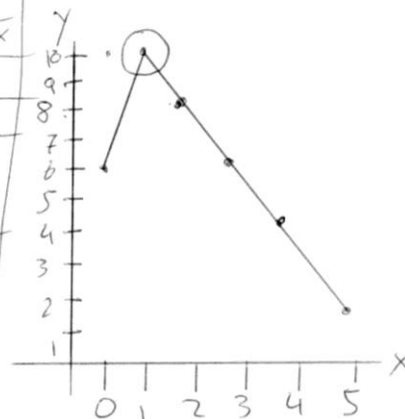
- a) Adierazi taula batean kenketari begira dauden soluzio posible guztiak eta bakoitzak ateratzeko duen probabilitatea.  
 b) Adierazi emaitzak grafikoki ( $x$  ardatzean soluzio posibleak -  $y$  ardatzean bakoitzaren probabilitatea)

| $x$ | $-$ | $x$ | $=$ |
|-----|-----|-----|-----|
| 6   |     | 6   | 0   |
| 6   |     | 5   | 1   |
| 6   |     | 4   | 2   |
| 6   |     | 3   | 3   |
| 6   |     | 2   | 4   |
| 6   |     | 1   | 5   |
| 5   |     | 5   | 0   |
| 5   |     | 4   | 1   |
| 5   |     | 3   | 2   |
| 5   |     | 2   | 3   |
| 5   |     | 1   | 4   |
| 4   |     | 4   | 0   |
| 4   |     | 3   | 1   |
| 4   |     | 2   | 2   |
| 4   |     | 1   | 3   |
| 3   |     | 3   | 0   |
| 3   |     | 2   | 1   |
| 3   |     | 1   | 2   |
| 2   |     | 2   | 0   |
| 2   |     | 1   | 1   |
| 1   |     | 1   | 0   |

360 bakoitzaren probabilitatea

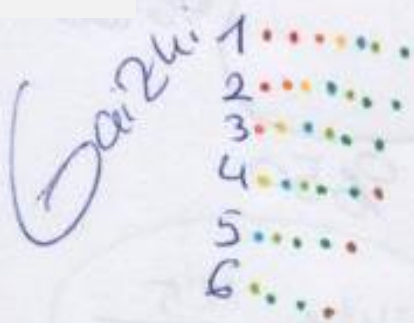
| Kopurua | Probabilitatea |
|---------|----------------|
| 0       | 6/36 = %16,67  |
| 1       | 10/36 = %27,78 |
| 2       | 8/36 = %22,22  |
| 3       | 6/36 = %16,67  |
| 4       | 4/36 = %11,11  |
| 5       | 2/36 = %5,56   |
| 6       | 0/36 = %0      |

~~Bataren~~ alde egingen nuke agustu.



**Ejemplo 3:** Al tirar tres dados al azar, Goizeder apuesta por que la suma de los tres dados sea 6 y Fernando por que sea 15.  
¿Quién tiene más probabilidad de ganar ? ¿Por qué?

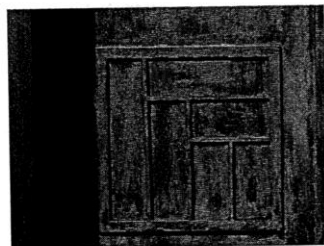
4.- Hiru dado jaurti ditugu. Goizederreke, hiru dadoren arteko batura 6 izatearen aldeko apostua egin du eta Fernandok, 15 izatearen aldekoa. Zeinek dauka aukera gehien irabazteko? Zergatik? Zenbat da bakoitzak daukan irabazteko probabilitatea?





# Ejemplo 4: ¿Cuál es la probabilidad de que una piedra tirada al azar caiga sobre cada una de las regiones limitadas en esta puerta? ¿Cuántas caerán en cada región si tiramos 240 piedras?

2.- Cetina izeneko herrian, argazkia bezalako atea aurkitu dugu. Ausaz harritxo bat botatzen badugu, zein probabilitate dago gune bakoitzean erortzeko?  
240 harritxo jaurtikiz gero, zenbat eroriko dira gutxi gora behera gune bakoitzean?



|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
|   |   | 2 |   |
|   |   | 4 |   |
| 1 | 3 |   |   |
|   |   | 5 | 6 |

$$\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{3}{16} = \frac{3}{16}$$

$$\frac{3}{16} = \frac{3}{16}$$

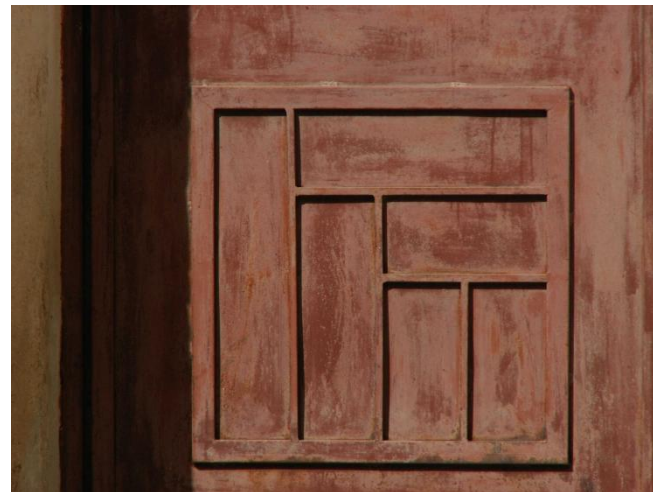
$$\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

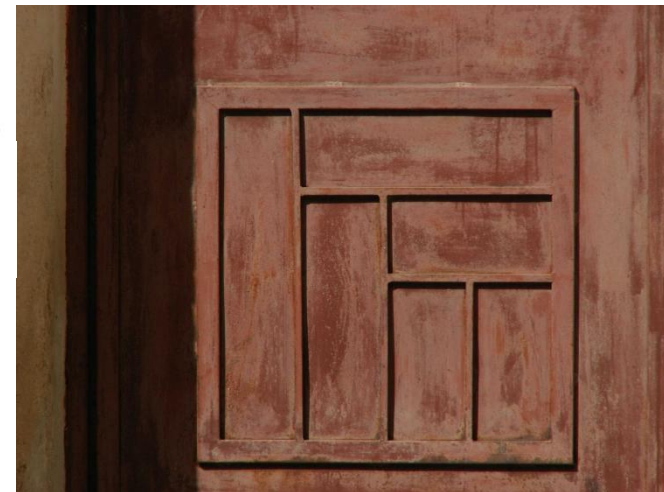
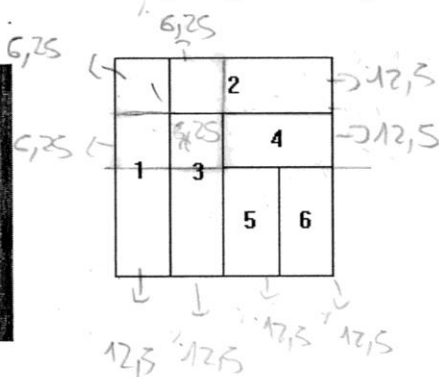
$$\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

1 gunean 60 harritxo  
2 gunean 45 harritxo  
3 gunean 45 harritxo  
4 gunean 30 harritxo  
5 gunean 30 harritxo  
6 gunean 30 harritxo



2.- Cetina izeneko herrian, argazkia bezalako atea aurkitu dugu. Ausaz harritxo bat botatzen badugu, zein probabilitate dago guneko bakoitzean erortzeko?  
240 harritxo jaurtikiz gero, zenbat eroriko dira gutxi gora behera guneko bakoitzean?



$$1 \rightarrow 6,25 + 6,25 + 12,75 = 25$$

$$2 \rightarrow 6,25 + 12,5 = 18,75$$

$$3 \rightarrow 6,25 + 12,5 = 18,75$$

$$4 \rightarrow 12,5$$

$$5 \rightarrow 12,5$$

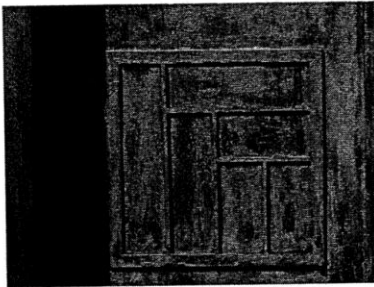
$$6 \rightarrow 12,5$$

$$100 : 4 = 25$$

201 bat

2.- Cetina izeneko herrian, argazkia bezalako atea aurkitu dugu. Ausaz harritxo bat botatzen badugu, zein probabilitate dago gun e bakoitzean erortzeko?

• 240 harritxo jaurtikiz gero, zenbat eroriko dira gutxi gora behera gun e bakoitzean?



|     |       |          |       |
|-----|-------|----------|-------|
|     |       | 2° 18,75 |       |
|     |       | 12,5     |       |
| 1   | 3     | 5        | 6     |
| 25% | 12,5% | 12,5%    | 12,5% |

25% 25%

25% 25%

100 harritxorekin

• 240 harritxorekin

$$1 = 25 \cdot 2 + 10 = 60$$

$$2 = 18,75 \cdot 2 + 7,5 = 45$$

$$3 = 18,75 \cdot 2 + 7,5 = 45$$

$$4 = 12,5 \cdot 2 + 5 = 30$$

$$5 = 12,5 \cdot 2 + 5 = 30$$

$$6 = 12,5 \cdot 2 + 5 = 30$$

$$1 \rightarrow 25\%40 = 10$$

$$2 \rightarrow 18,75\%40 = 7,5$$

$$3 \rightarrow 18,75\%40 = 7,5$$

$$4 \rightarrow 12,5\%40 = 5$$

$$5 \rightarrow 12,5\%40 = 5$$

$$6 \rightarrow 12,5\%40 = 5$$

1 an = 25eko Probabilitate

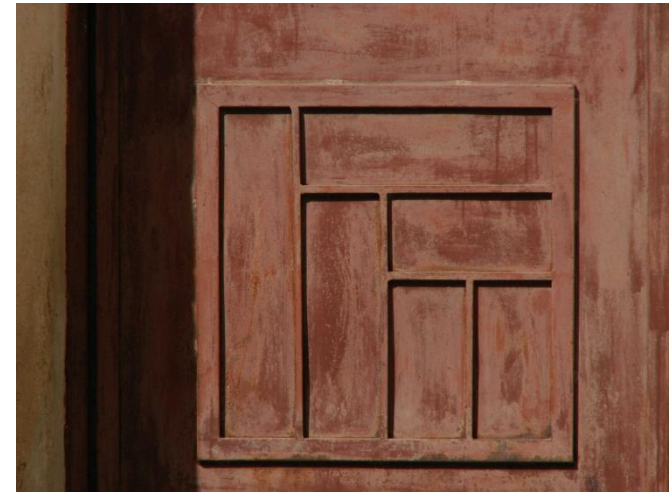
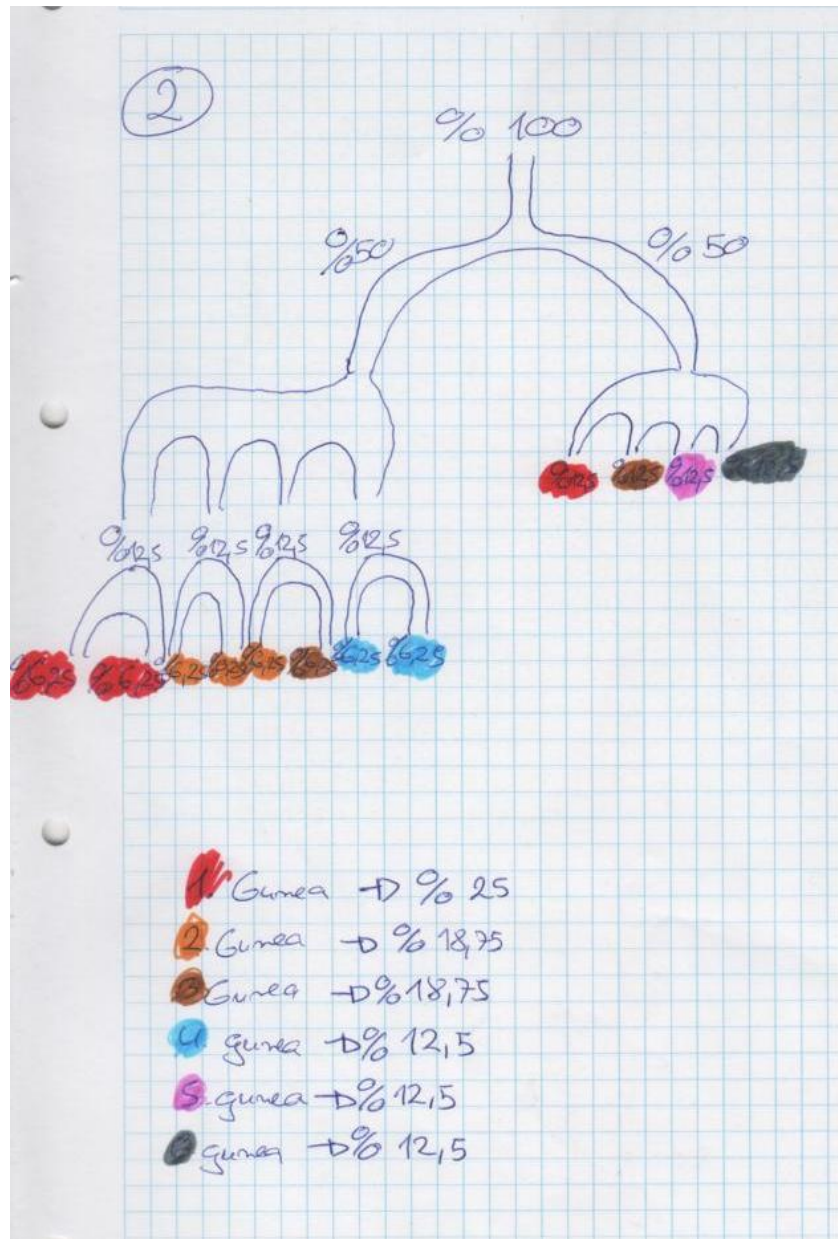
2 an = 18,75eko Probabilitate

3 an = 18,75eko Probabilitate

4 an = 12,5eko Probabilitate

5 an = 12,5eko Probabilitate

6 an = 12,5eko Probabilitate






2 - 5 eta 6 - %25



$\%12,5 \rightarrow 5$  a tohatreho  
 $\%12,5 \rightarrow 6$  a tohatreho

} Zeren lau zatitan bakoitza  $\frac{1}{4}$  zatituz  
 du eta bi zatidunak  $\frac{1}{2}$  eginda  
 tohatzen zara bakoitzari

4a berdina da 5a eta 6a berak berare %12,5 da

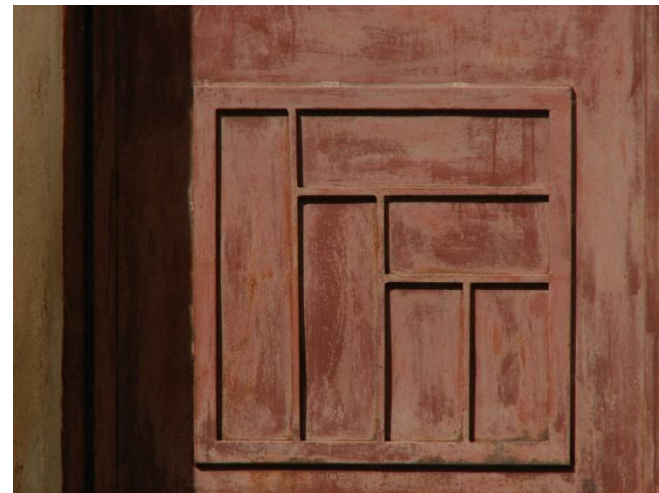
1a %25 da 4<sup>a</sup> zatituen bakoitza be kude 

orden erdialdi artzen dute %25 da.

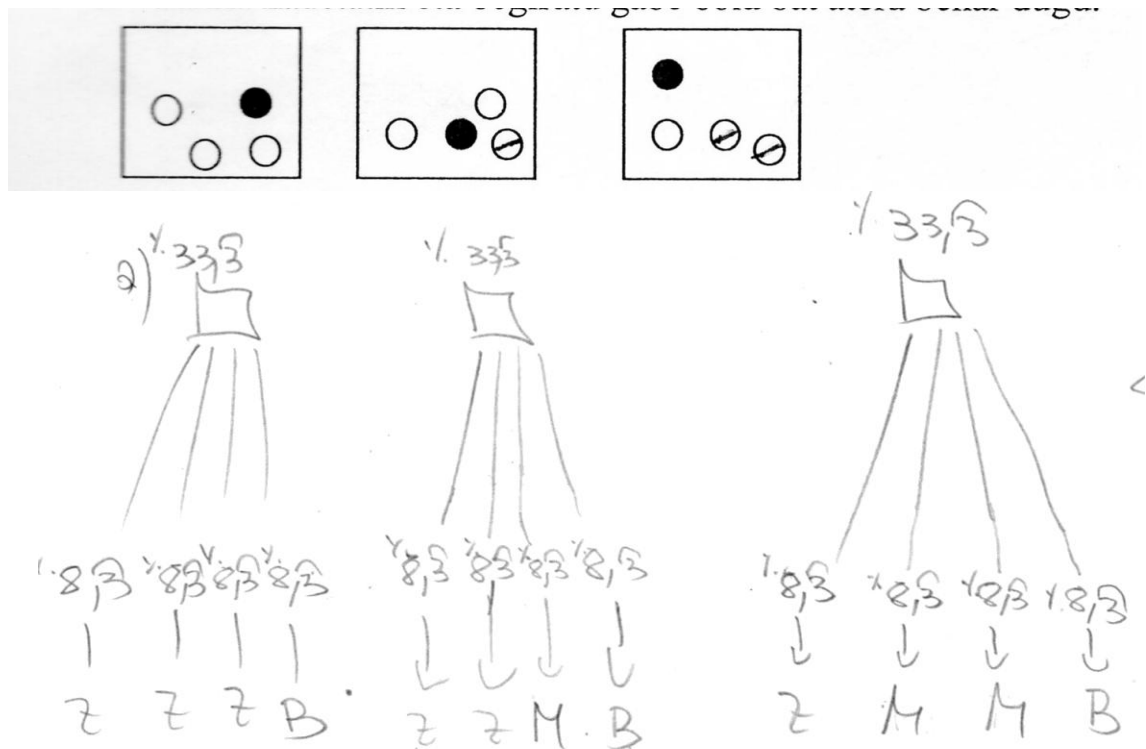
2 eta 3a berdina dira ~~da~~ orain arte %62,5 da ordum geroi  
 dira %37,5a eta 2 zatit berdin direnez  $\rightarrow$  2 egiten dugu hainbat

Denen probabilitatea %18,75 da 2-arena eta %18,75 3-arena

$$(1 - \%25) + (2 - \%18,75) + (3 - \%18,75) + (4 - \%12,5) + (5 - \%12,5) + (6 - \%12,5) = \%100$$



**Ejemplo 5:** Extraemos al azar una bola de una de las tres cajas elegida también al azar. ¿Qué probabilidad hay de que la bola elegida sea blanca? ¿Y negra? ¿Y rayada?

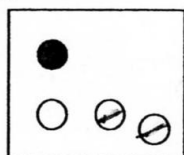
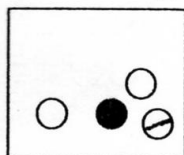
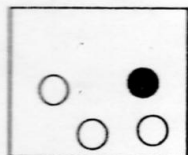


$$[B]_{\text{blanca}} \rightarrow \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times 6 = \frac{1}{2}$$

$$[M]_{\text{rayada}} \rightarrow \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times 3 = \frac{1}{4}$$

$$[N]_{\text{negra}} \rightarrow \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times 3 = \frac{1}{4}$$

5.- Kutxa hauetatik eta begiratu gabe bola bat atera behar dugu.



A  $\frac{1}{3}$

B  $\frac{1}{3}$

C  $\frac{1}{3}$

a) Zein probabilitate dago bola zuria ateratzeko?

A -  $\frac{1}{3}$  horietatik  $\frac{3}{4}$  dago bola zuria ateratzeko  $\% 24,975$

B -  $\frac{1}{3}$  horietatik  $\frac{2}{4}$  dago bola zuria ateratzeko  $\% 16,65$

C -  $\frac{1}{3}$  horietatik  $\frac{1}{4}$  dago bola zuria ateratzeko  $\% 8,325$

b) Eta marraduna ateratzeko?

A -  $\frac{1}{3}$  horietatik  $\frac{1}{4}$  dago bola marraduna ateratzeko  $\% 8,325$

B -  $\frac{1}{3}$  horietatik  $\frac{1}{4}$  dago bola marraduna ateratzeko  $\% 8,325$

C -  $\frac{1}{3}$  horietatik  $\frac{2}{4}$  dago bola marraduna ateratzeko  $\% 16,65$

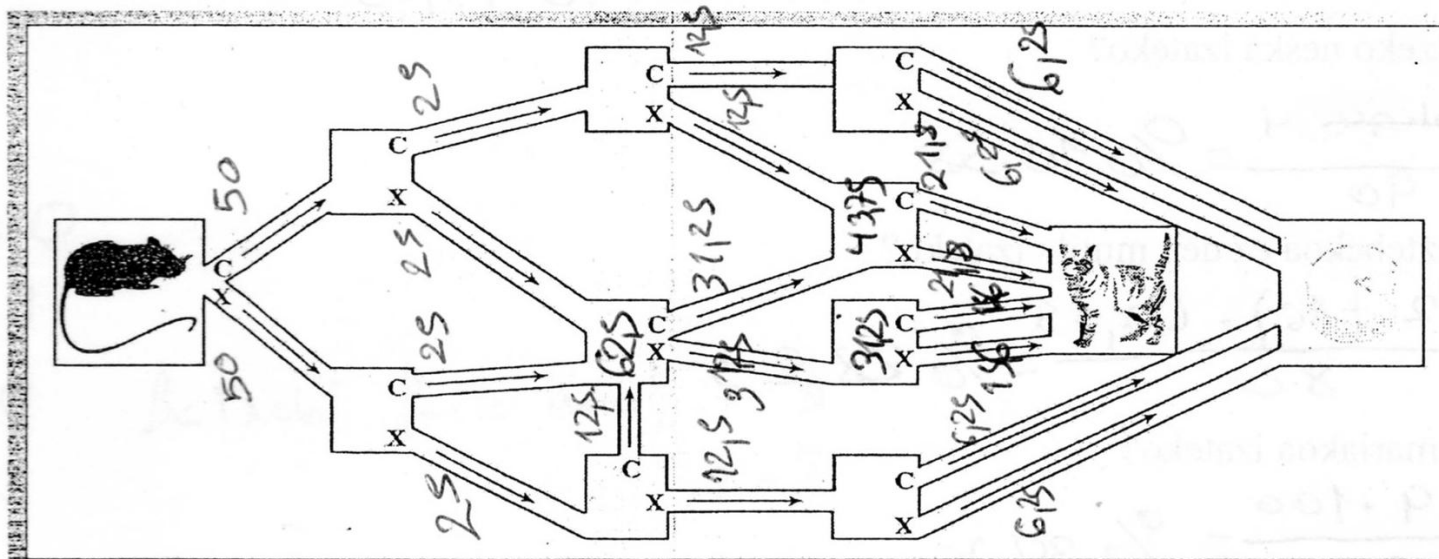
c) Eta beltza izateko?

$\% 49,95$  ko aukera dago bola zuria ateratzeko  
 $\% 24,975$  ko aukera dago bola marraduna ateratzeko

$$100 - (49,95 + 24,975) = \% 25,075 \text{ ko aukera dago bola beltza ateratzeko}$$

**Ejemplo 6:** ¿Qué probabilidad hay de que el ratón llegue a la casilla donde está el queso si cada vez que encuentra un cruce tira una moneda? ¿Y de caer en la casilla donde está el gato?

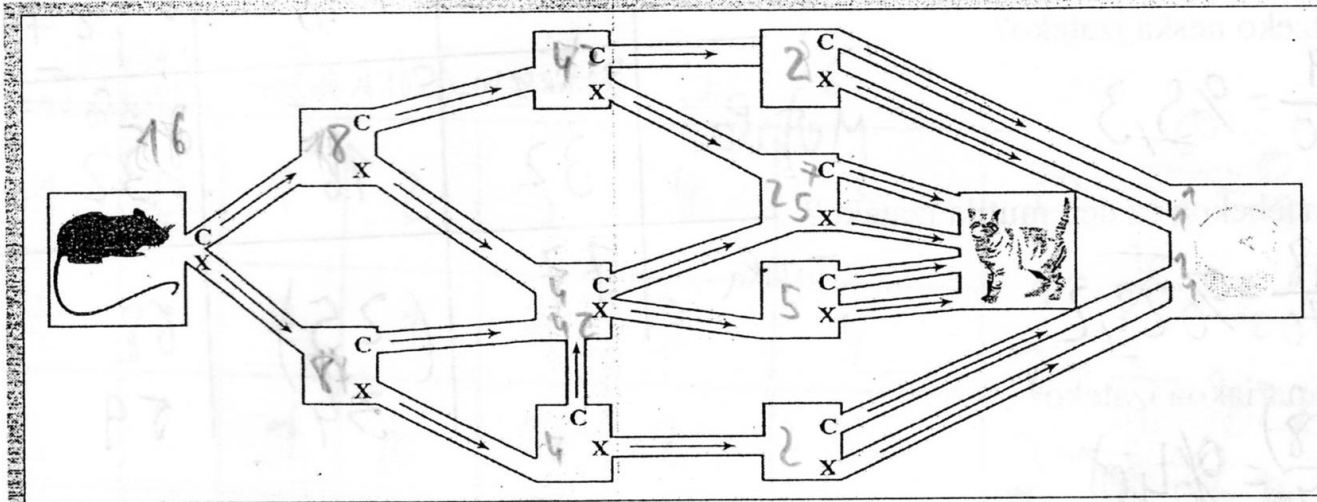
1.- a) Zein probabilitate dago saguak gazta zatia hartzeko, bide gurutzaketa bakoitzean bidea aukeratzeko txanpon bat botatzen badu? Eta katua dagoen tokian erortzeko? Arrazoitu erantzuna.



$P(\text{Gazta}) = 6,25$   
 $\% 25$  Gazta hartzeko  
 $P(\text{Katua}) =$   
 $15,6 \cdot 2 + 21,8 \cdot 2 =$   
 $\% 75$  Katua erortzeko  
 tokian erortzeko



1.- a) Zein probabilitate dago saguak gazta zatia hartzeko, bide gurutzaketa bakoitzean bidea aukeratzeko txanpon bat botatzen badu? Eta katua dagoen tokian erortzeko? Arrazoitu erantzuna.

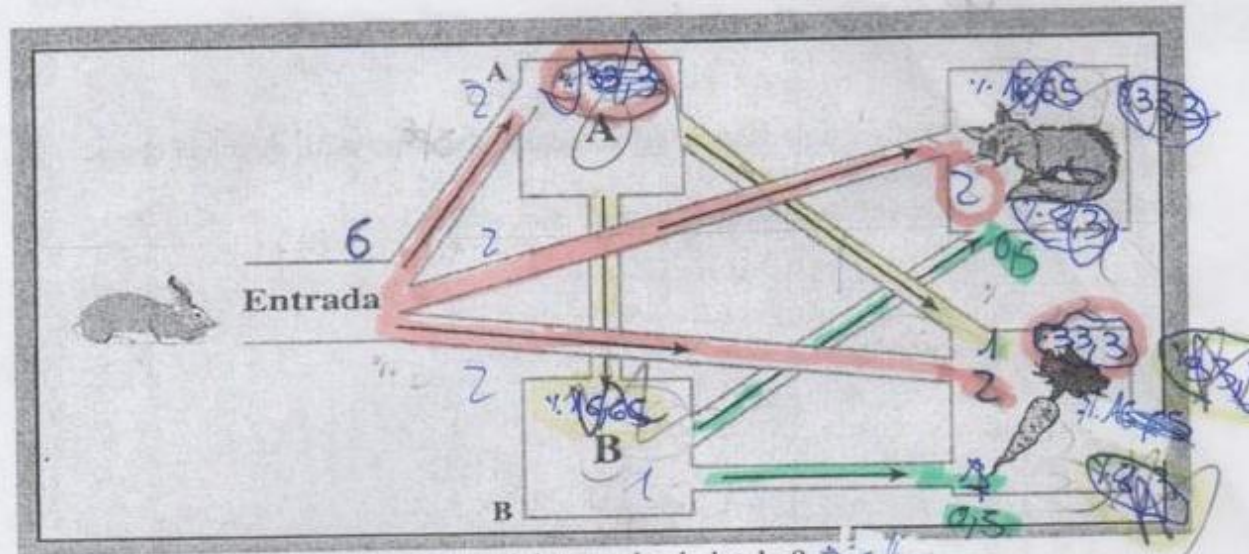


$$\frac{4}{16} \cdot 100 = \%25 \text{ gazta hartzeko } \%25$$

$$\frac{12}{16} \cdot 100 = \%75 \text{ Katua erortzeko}$$

**Ejemplo 7:** ¿Qué probabilidad hay de que el conejo llegue a la casilla donde está la zanahoria si tiene la misma probabilidad de elegir un camino u otro cada vez que encuentra un cruce? ¿Y de que llegue a la casilla donde está el zorro?

3.- Untxiak edozein bidegurutzetara ailegatzzen denean, markatzen diren bideak hartzeko probabilitate berdinarekin hartzerik badu,



a) Zein probabilitate dauka untxiak azanahoria jateko?  $\frac{3}{5}/6$

$\approx 58,3\%$

b) Zein probabilitate dauka untxiak otsoa dagoen tokira ailegatzeko?  $\frac{2}{5}/6$

$\approx 41,6\%$

# Conclusiones

- ¿ $P(E)=1$ ?
- Manipular, simular, experimentar para resolver y formalizar.
- Debatir, razonar, justificar.
- Buscar estrategias propias de resolución y compartirlas.
- Apelar a la intuición y la lógica y no a la simple mecanización.

